

文章编号: 1000-7598 (2013) 07-1867-07

岩土体渗流自由面问题的重心插值无网格方法

李树忱¹, 王兆清², 袁 超¹

(1. 山东大学 岩土与结构工程研究中心, 济南 250061; 2. 山东建筑大学 工程力学研究所, 济南 250101)

摘 要: 岩土体的渗透破坏、地下工程的防渗设计等无不与渗流计算有关。针对渗流自由面问题, 提出一种重心拉格朗日插值的配点型无网格方法。由于渗流自由面问题的求解区域是不规则区域, 该方法通过将不规则求解区域嵌入一个正则矩形区域, 在正则区域上采用重心拉格朗日插值近似未知函数, 利用配点法离散渗流问题的控制方程, 将重心拉格朗日插值的微分矩阵离散成代数方程表达的矩阵形式。将自由面上的边界条件通过重心拉格朗日插值离散, 通过置换方程法和附加方程法施加边界条件, 利用正则区域上的重心插值配点法, 通过迭代确定最终自由面的位置。数值算例表明所提出的无网格方法对于求解渗流自由面问题的正确性和高精度。

关 键 词: 渗流自由面问题; 无网格方法; 重心拉格朗日插值; 微分矩阵; 配点法; 正则区域法

中图分类号: O 302

文献标识码: A

Barycentric interpolation meshless method for solving rock and soil seepage free surface problems

LI Shu-chen¹, WANG Zhao-qing², YUAN Chao¹

(1. Research Center of Geotechnical and Structural Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China;

2. Institute of Engineering Mechanics, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China)

Abstract: The seepage failure of rock and soil and the seepage design for underground engineering are closely related to the seepage calculation. A meshless collocation method based on barycentric Lagrange interpolation for solving seepage free surface problems in 2D is presented. Embedded the irregular seepage domain into a regular rectangular domain, the seepage governing equation is extended into the regular rectangular domain. The unknown function of seepage in seepage domain is approximated by barycentric Lagrange interpolation in regular rectangular domain. Then, the barycentric Lagrange interpolation collocation method (BLICM) can be used to solve seepage problems in the regular rectangular domain. The governing equation of seepage problem is discretized by using BLICM into algebraic equations. Using notations of differentiation matrix and Kronecker product of matrices, the system of algebraic equations can be rewritten as matrix form. The boundary conditions are discretized by barycentric Lagrange interpolation and applied by using replacement equation method or/and additional equation method. The final location of free surface is obtained by iteration computation of BLICM in regular rectangular domain. The numerical results compared with others numerical methods indicate the correctness and high accuracy of the proposed method.

Key words: seepage free surface problem; meshless method; barycentric Lagrange interpolation; differentiation matrix; collocation method; regular domain method

1 引 言

地下水渗流问题是岩土工程领域的一个重要的研究课题, 地下水渗流中的一个重要问题是渗流自

由面问题。在边坡、土坝、地下洞室及地下水运动等渗流分析中, 均涉及渗流自由面问题。岩土体边坡中渗流自由面的确定, 可以明确地下水在边坡中的赋存特性及其运动过程。

收稿日期: 2012-06-29

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(No. 2010CB732002); 国家自然科学基金面上项目(No. 51179098); 教育部博士点基金博导类(No. 20120131110031); 新世纪优秀人才支持计划资助。

第一作者简介: 李树忱, 男, 1973 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事深部岩体力学特性和隧道灾害防治方面的研究与教学工作。

E-mail: shuchenli@sdu.edu.cn

通讯作者: 王兆清, 男, 1965 年生, 博士, 副教授, 主要从事工程数值分析方法研究。E-mail: sdjzuwang@126.com

含有自由面渗流问题分析的难点在于事先不知道自由面的位置。分析含有自由面渗流问题的主要方法是解析方法和数值方法。解析法采用复变函数法分析渗流自由面问题^[1]，由于实际问题的复杂性，解析方法在实际工程应用中有很大的局限性。数值方法可分为两类：网格型法和无网格型方法。基于网格的数值方法有有限差分法^[2]和有限元方法^[3-5]，在有限元法中由于浸润线穿越单元，处理上存在一定的不便。为解决自由面穿越单元的问题，王兆清等^[6]提出了多节点有限元方法，郑宏等^[7]提出基于变分原理的改进 Bathe 算法。无网格型方法不需要在求解域内划分计算网格，适合自由面问题的处理。无网格型方法可分为域内无网格方法^[8]和边界节点方法。边界节点方法主要有边界元方法^[9]、积分方程法^[10-11]和 Trefftz 方法^[12-13]。边界元方法将域内控制方程转化成边界上的积分方程求解，采用数学优化的方法确定渗流自由面^[14-15]。边界节点方法只能求得边界节点上的函数值，对域内节点函数值需要采用其他的数值方法确定，这在岩土渗流-应力等耦合分析方面是不方便的。

基于移动最小二乘法的无网格方法，由于近似函数不具有插值性质，在边界条件的施加上是间接的。采用具有插值性质的近似函数，可以方便处理边界条件。拉格朗日插值是一种重要的数值逼近方法，但当插值节点数量较多时，高阶拉格朗日插值表现出数值不稳定性，著名的 Runge 现象说明了拉格朗日插值的数值不稳定性。将拉格朗日插值公式改写为重心公式形式，得到重心拉格朗日插值^[16]，重心拉格朗日插值具有数值稳定性好^[17]、插值近似精度高的优点^[18-19]。基于重心拉格朗日插值的重心插值配点法求解工程微分方程问题具有很高的计算精度^[20-22]。本文采用重心拉格朗日插值作为近似函数，将不规则渗流求解区域嵌入正则矩形区域，采用正则区域上的重心插值配点法，通过迭代求解渗流自由面问题。该方法是一种域内无网格方法。

2 重心拉格朗日插值及其微分矩阵

考虑定义在区间 $[a, b]$ 上的函数 $u(x)$ ， $u(x)$ 在节点 $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ 上的函数值为 $u_i = u(x_i), i = 1, 2, \dots, n$ 。 $u(x)$ 的重心拉格朗日插值为^[8]

$$u(x) = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{x - x_j} u_j \bigg/ \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{x - x_j} \quad (1)$$

式中： $w_j = 1 / \prod_{j \neq k} (x_j - x_k), j = 0, 1, \dots, n$ 为重心插值权。

记重心拉格朗日插值的插值基函数为

$$L_k(x) = \frac{w_k}{x - x_k} \bigg/ \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{x - x_j}, k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

函数 $u(x)$ 的重心拉格朗日插值可表示为

$$u(x) = \sum_{j=1}^n L_j(x) u_j \quad (3)$$

则 $u(x)$ 的 m 阶导数可表示为

$$u^{(m)}(x) = \frac{d^m u(x)}{dx^m} = \sum_{j=1}^n L_j^{(m)}(x) u_j \quad (4)$$

$u(x)$ 在节点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 处的 m 阶导数可表示为

$$u^{(m)}(x_i) = \sum_{j=1}^n L_j^{(m)}(x_i) u_j = \sum_{j=1}^n D_{ij}^{(m)} u_j, i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

式中： $D_{ij}^{(m)} = L_j^{(m)}(x_i)$ 为第 j 个插值基函数在第 i 个节点处的 m 阶导数值。

将式(5)写成矩阵的形式

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{D}^{(m)} \mathbf{u} \quad (6)$$

式中： $\mathbf{u}^{(m)} = [u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \dots, u_n^{(m)}]^T$ 为未知函数 $u(x)$ 在节点处的 m 阶导数值列向量； $\mathbf{D}^{(m)}$ 为未知函数的 m 阶重心插值微分矩阵，其元素为 $D_{ij}^{(m)} = L_j^{(m)}(x_i)$ ； $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ 为未知函数在节点处的函数值。

一阶微分矩阵可以通过对式(2)求导直接得到，高阶微分矩阵可以通过下面递推公式得到^[16]，

$$\left. \begin{aligned} D_{ij}^{(m)} &= m \left(D_{ii}^{(m-1)} D_{ij}^{(1)} - \frac{D_{ij}^{(m-1)}}{x_i - x_j} \right), i \neq j \\ D_{ii}^{(m)} &= - \sum_{j=1, j \neq i}^n D_{ij}^{(m)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

3 渗流问题的重心插值配点法

3.1 渗流自由面问题的控制方程

对于均质土坝 $ABCD$ 的稳态渗流问题，上水头为 h_1 ，下水头为 h_2 ，渗流自由面为 PS ，溢出面为 ST ，如图1所示。设水头函数 $u = y + p/\gamma$ ，其中 p 为流体的压强， γ 为流体的重度。根据 Darcy 定律，二维稳态渗流的基本控制方程为

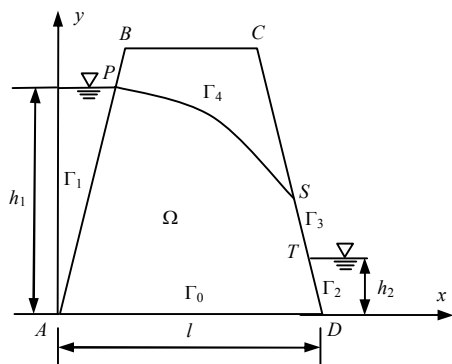


图1 土坝的稳态渗流问题几何示意图
Fig.1 Schematic diagram of steady seepage problem in dam

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} u &= h_1, \text{ 边界 } \Gamma_1 \\ u &= h_2, \text{ 边界 } \Gamma_2 \\ u &= y, \text{ 边界 } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \\ q &= 0, \text{ 边界 } \Gamma_0 \cup \Gamma_4 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: $q = \partial u / \partial n$; n 为边界 Γ_0, Γ_4 的外法线方向。由于在边界 Γ_4 上同时施加了第1类和第2类边界条件, 稳态渗流问题的定解问题式(8)、(9)是一种偏微分方程自由边界边值问题。求解方程(8)、(9)时, 一般指定边界 Γ_4 上满足其中一个边界条件, 通过迭代使方程(8)、(9)满足另一个边界条件^[14]。

3.2 正则区域重心插值配点法计算公式

假设初始自由面 PS 为直线, 渗流自由面问题的求解区域 $APSD(\Omega)$ 是不规则区域, 将区域 Ω 嵌入一个正则的矩形区域 $ABCD(\Omega_0)$, $\Omega_0 \supset \Omega$, 将渗流控制方程扩展到矩形区域, 如图2所示。在区域 Ω_0 的 x 、 y 方向分别布置 m 、 n 个节点 $x_i (i=1, 2, \dots, m), y_j (j=1, 2, \dots, n)$, 构成区域 Ω_0 上的张量积型计算节点 $(x_i, y_j), i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$, 未知函数 $u(x, y)$ 在这些节点上的函数值为 $u_{ij} = u(x_i, y_j), i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ 。利用重心拉格朗日插值公式(3)的张量积型插值公式, 未知函数 $u(x, y)$ 近似为

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i(x) M_j(y) u_{ij} \quad (10)$$

式中: $L_i(x)$ 、 $M_j(y)$ 分别为重心拉格朗日插值在节点 $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 、 $y_j (j=1, 2, \dots, n)$ 上的插值基函数。

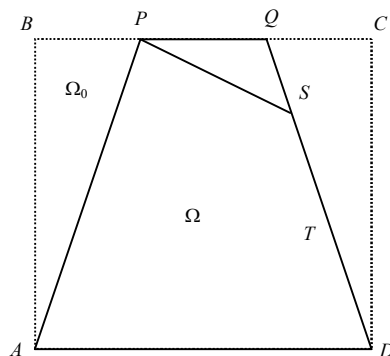


图2 正则区域示意图
Fig.2 Schematic diagram of regular domain

将近似函数式(10)代入式(8), 可得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i''(x) M_j(y) u_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i(x) M_j''(y) u_{ij} = 0 \quad (11)$$

令式(11)在所有的计算节点 $(x_i, y_j), i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ 上成立

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i''(x_k) M_j(y_l) u_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i(x_k) M_j''(y_l) u_{ij} = 0, \quad k=1, 2, \dots, m; l=1, 2, \dots, n \quad (12)$$

注意到插值基函数性质 $L_i(x_k) = \delta_{ki}, M_j(y_l) = \delta_{jl}$, 并利用微分矩阵的记号, 方程组(12)可表示为矩阵形式

$$[C^{(2)} \otimes I_n + I_m \otimes D^{(2)}] U = 0 \quad (13)$$

式中: $C^{(2)}$ 、 $D^{(2)}$ 分别为在节点 $x_i (i=1, 2, \dots, m)$ 、 $y_j (j=1, 2, \dots, n)$ 上重心拉格朗日插值的二阶微分矩阵; I_m 、 I_n 分别为 m 、 n 阶单位矩阵; 符号 $\otimes$ 表示矩阵的 Kronecker 积^[23]; U 为未知函数在计算节点处函数值构成列向量 $U = [u_{11}, u_{12}, \dots, u_{1n}, u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n}, \dots, u_{m1}, u_{m2}, \dots, u_{mn}]^T$ 。

3.3 边界条件的离散和施加方法

求解代数方程组(13), 需要施加适当的边界条件。渗流问题与热传导问题的控制方程相同, 对于热传导问题, 固定物理区域边界条件后, 物理区域内的温度分布与物理区域外的条件无关。因此, 数值计算时只需要考虑渗流物理区域 Ω 的边界条件, 不需要考虑正则区域 Ω_0 的边界条件。边界条件式(9)中有两类边界条件, 即给定水头值的边界条件和即给定水头函数通量的边界条件。在渗流物理区域 Ω 的边界上取 $N (N > 2(m+n))$ 个边界点 $(x_i^b, y_i^b), i=1, 2, \dots, N$, 对于给定水头值的边界点, 其函数值由重心插值公式(10)可表示为正则区域

Ω_0 上计算节点处函数值的线性组合形式

$$u(x_k^b, y_k^b) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i(x_k^b) M_j(y_k^b) u_{ij} = u_k^b \quad (14)$$

对于给定通量（法向导数）的边界条件

$$q = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = 0 \quad (15)$$

式中: $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ 为边界节点出的外法向单位向量。由重心插值公式 (10) 可表示为

$$q(x_k^b, y_k^b) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [L_i'(x_k^b) M_j(y_k^b) n_x + L_i(x_k^b) M_j'(y_k^b) n_y] u_{ij} = 0 \quad (16)$$

对于固定的边界, 其外法线方向的方向余弦容易确定。对于未知的自由面边界, 文献[11]采用边界点附近的三点插值函数计算自由面外法线向量的方向余弦, 这里采用自由面节点坐标 $(x_k^f, y_k^f), k = 1, 2, \dots, M$ 的重心拉格朗日插值确定。

$$y = \sum_{k=1}^M L_k(x) y_k^f \quad (17)$$

边界条件式 (16)、(17) 可以采用置换方程法^[23]或附加方程法施加^[22]。置换方程法就是用边界条件离散方程替换方程组 (13) 的某一个方程; 附加方程法是将边界条件离散方程附加到方程组 (13) 中, 构成一个过约束代数方程组求解。在实际计算过程中, 常组合采用两种边界条件的施加方法, 如果边界节点与某一个计算节点重合, 则用边界节点的离散方程置换该计算节点编号对应代数方程, 否则采用附加法施加边界条件。

4 数值实施和验证

本文算例采用 Matlab 编写计算程序, 以发挥 Matlab 强大的矩阵计算优势。计算节点采用特殊分布的 Chebyshev 型节点, 区间 $[-1, 1]$ 上的第 2 类 Chebyshev 点为^[23]

$$t_k = -\cos(k\pi/n), k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

通过坐标变换 $x = (a+b)/2 + t(b-a)/2$ 将式 (18) 的点变换为任意区间 $[a, b]$ 上的计算节点。

4.1 算例 1

考虑文献[14]中的矩形水坝渗流自由面问题, 其上水头 $h_1 = 6.301$ m, 下水头 $h_2 = 1.236$ m, 坝宽 $l = 6.159$ m。将土坝嵌入高×宽为 6.301 m× 6.159 m 的正则矩形区域, 渗流点 S 的高度初始假设为 3 m,

并假设 PS 直线为渗流自由面, 如图 2 所示。在 x 、 y 方向分别布置 21 个节点, 构成 441 个张量型计算节点, 假设自由面满足通量边界条件 $q = 0$, 由重心插值配点法计算自由面节点的水头值 u_s , 并与自由面边界条件 $u = y$ 比较, 如果 $\|u_s - y\| < \varepsilon$, 则调整自由面节点纵坐标为 $y = u_s$, 继续采用重心插值配点法计算, 直至收敛得到自由面的位置。计算流程如图 3 所示。

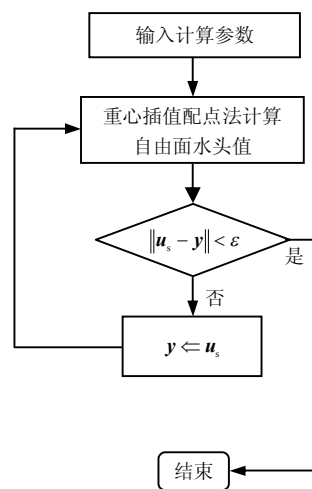


图 3 迭代计算流程

Fig.3 Flow chart of iteration procedure

控制精度 $\varepsilon = 0.001$, 重心插值配点法 (BLICM) 计算的自由面位置与多节点有限元方法 (MFEM)^[6]、边界元形状优化方法 (BEMSO)^[14] 和解析解^[14] 的比较如表 1 所示。由表 1 可以看出, 重心插值配点法的计算结果和其他数值方法的计算结果是相符的。数值计算的压力水头等值线如图 4 所示。

表 1 算例 1 中自由面节点的 y 坐标值 (单位: m)

Table 1 y -coordinate values of nodes on free surface in example 1 (unit: m)

x	解析解	BLICM	MFEM	BEMSO
0.505	6.179	6.174	6.198	6.208
0.866	6.055	6.058	6.058	6.057
1.472	5.822	5.831	5.834	
2.078	5.576	5.571	5.573	5.598
2.785	5.253	5.228	5.232	
3.492	4.843	4.839	4.844	4.856
4.243	4.401	4.366	4.371	
4.993	3.815	3.810	3.818	3.853
5.491	3.374	3.367	3.340	3.377
5.745	3.110	3.106	3.108	3.110
5.997	2.800	2.793	2.811	2.795
6.159	2.523	2.531	2.523	2.513

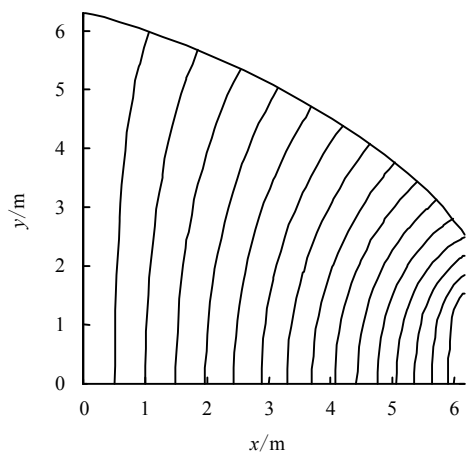


图 4 算例 1 的压力水头等值线图

Fig.4 Distribution of pressure head in example 1

4.2 算例 2

考虑文献[10]中的矩形水坝渗流自由面问题，其上水头 $h_1 = 24 \text{ m}$ ，下水头 $h_2 = 4 \text{ m}$ ，坝宽 $l = 16 \text{ m}$ 。将土坝嵌入高×宽为 $24 \text{ m} \times 16 \text{ m}$ 的正则矩形区域，渗流点 S 的高度初始假设为 16 m 。21×21 个计算节点重心插值配点法迭代计算自由面的位置，重心插值配点法 (BLICM) 计算结果和奇异积分方程法 (SE) [10]、超奇异积分方程法 (HSE) [10]、基本解方法 (MFS) [11] 计算结果的比较如表 2 所示，可以看出本文方法的计算结果与其他数值方法的计算结果是吻合的。重心插值配点法计算的自由面位置见图 5 所示，压力水头等值线如图 6 所示。

表 2 算例 2 中自由面节点的 y 坐标值 (单位: m)
Table 2 y -coordinate values of nodes on free surface in example 2 (unit: m)

x	BLICM	HSE	SE	MFS
1	23.743	23.740	23.760	23.750
2	23.410	23.400	23.420	23.410
3	23.016	23.010	23.030	23.030
4	22.584	22.520	22.590	22.590
5	22.099	22.090	22.120	22.120
6	21.582	21.570	21.600	21.600
7	21.012	21.000	21.040	21.040
8	20.398	20.390	20.430	20.440
9	19.745	19.730	19.780	19.790
10	19.021	19.020	19.070	19.080
11	18.256	18.240	18.300	18.320
12	17.407	17.390	17.470	17.500
13	16.483	16.450	16.560	16.590
14	15.447	15.390	15.500	15.580
15	14.250	14.090	14.150	14.400
16	12.675	12.680	12.610	12.880

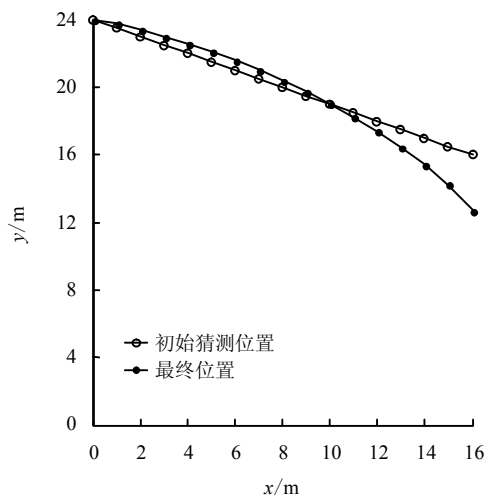


图 5 算例 2 的渗流自由面的初始假设位置和最终位置

Fig.5 Initial guess location and final location of free surface in seepage in example 2

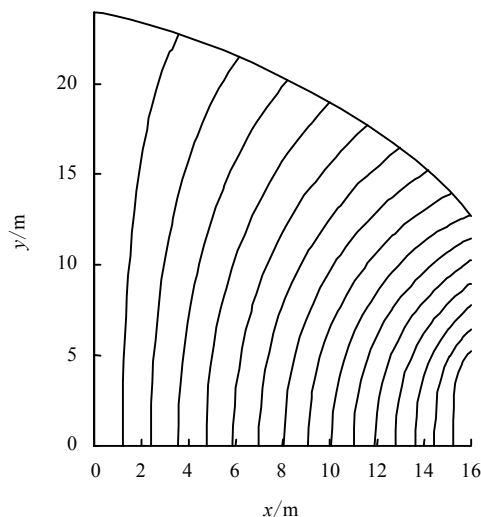


图 6 算例 2 的压力水头等值线图

Fig.6 Distribution of pressure head in example 2

4.3 算例 3

考虑文献[8]中的梯形均质水坝渗流自由面问题，坝顶高程为 20 m ，坝顶宽为 7 m ，坝基面高程为 0 m ，上游坝坡坡度 $m_1 = 1:2.5$ ，下游坝坡坡度 $m_2 = 1:2.0$ ，上游水位高程为 18 m ，下游无水，基础为不透水层，如图 7 所示。重心插值配点法计算时，将水坝嵌入一个 $97 \text{ m} \times 18 \text{ m}$ 的矩形区域，在矩形区域内布置 30×20 个计算节点。取初始逸出高度 5 m ，初始假设自由面为直线，经过 11 次迭代得到的最终自由面位置见图 7 所示。计算得到的下游逸出高度为 8.004 m ，接近文献[8]采用无单元法的计算结果 8.105 m 。

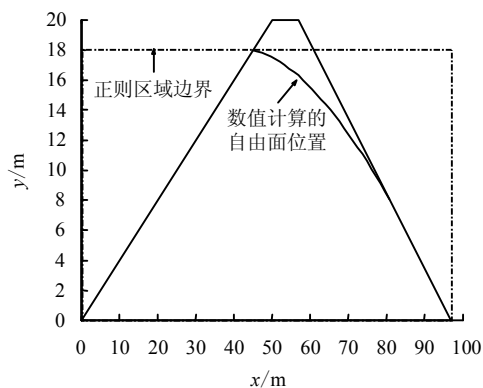


图7 算例3的坝体构型和最终自由面位置

Fig.7 Configuration of dam and final location of free surface in example 3

5 结 论

(1) 针对岩土体工程中渗流自由面问题, 提出一种重心拉格朗日插值的配点型无网格方法。将不规则求解区域嵌入正则矩形区域, 在正则矩形区域上采用重心插值配点法计算渗流自由面问题, 不需要划分计算单元, 也不需要数值积分, 是一种真正的无网格方法。将边界条件采用重心拉格朗日插值离散, 置换方程法或附加方程法施加边界条件, 为处理任意几何形状区域问题提供了极大的便利。

(2) 重心插值配点法计算得到计算节点的函数值, 计算节点处的导数值可通过微分矩阵直接计算得出。对于其他位置点函数值和导数值可以通过重心拉格朗日插值计算得到, 这为后处理过程提供了便利。

(3) 本文方法适用于均质水坝, 对于变渗透系数的非均质水坝, 因为物理区域外的渗透系数无法确定, 不能采用正则区域重心插值配点法计算。对于分区域均质水坝, 采用区域分解法, 在每一个子区域上采用正则区域重心插值配点法计算。

参 考 文 献

- [1] POLUBARINOVA P Y. Theory of Groundwater Movement[M]. New Jersey: Princeton University Press, 1962.
- [2] BARDET J P, TETSUO T. A practical method for solving free-surface seepage problems[J]. **Computers and Geotechnics**, 2002, 29(6): 451—475.
- [3] ZHENG H, DAI H C, LIU D F. A variational inequality formulation for unconfined seepage problems in porous media[J]. **Applied Mathematical Modelling**, 2009, 33(1): 437—450.
- [4] FU J F, JIN S. A study on unsteady seepage flow through dam[J]. **Journal of Hydrodynamics**, 2009, 21(4): 499—504.
- [5] ATAIE A B, VOLKER R E, LOCKINGTON D A. Numerical and experimental study of seepage in unconfined aquifers with a periodic boundary condition[J]. **Journal of Hydrology**, 1999, 222(1): 165—184.
- [6] 王兆清, 李术才, 李树忱. 无压渗流问题的多节点有限元方法[J]. **岩土力学**, 2008, 29(10): 2647—2650. WANG Zhao-qing, LI Shu-cai, LI Shu-chen. Multi-node finite element approaches for unconfined seepage flow problem[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2008, 29(10): 2647—2650.
- [7] 郑宏, 戴会超, 刘德富. 改进的有自由面渗流问题的Bathe算法[J]. **岩土力学**, 2005, 26(4): 505—512. ZHENG Hong, DAI Hui-chao, LIU De-fu. Improved Bathe's algorithm for seepage problems with free surfaces[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(4): 505—512.
- [8] 葛锦宏, 李广信, 介玉新. 无单元法在有自由面渗流计算中的应用[J]. **计算力学学报**, 2003, 20(2): 241—243, 254. GE Jin-hong, LI Guang-xin, JIE Yu-xin. Application of element-free method to the seepage calculation with free surface[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2003, 20(2): 241—243, 254.
- [9] WU C P, LIN C H, CHIOU Y J. Multi-region boundary element analysis of unconfined seepage problems in excavations[J]. **Computers and Geotechnics**, 1996, 19(2): 75—96.
- [10] CHEN J T, HSIAO C C, CHIU Y P, et al. Study of free-surface seepage problems using hypersingular equations[J]. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 2007, 23(8): 755—769.
- [11] KHOMGRIS C, PHADUNGSACK R, SOMCHART C. The method of fundamental solutions for solving free boundary saturated seepage problem[J]. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, 2011, 38(2): 249—254.
- [12] 薛馨, 金吾根, 李珏, 等. Trefftz直接法解渗流自由面问题[J]. **岩石力学与工程学报**, 2005, 24(13): 2322—2326. XUE Xin, JIN Wu-gen, LI Jue, et al. Solution of free surface seepage problems by Trefftz direct method[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(13): 2322—2326.

- [13] 李珏, 金吾根, 薛馨, 等. Trefftz 间接法解自由面渗流问题[J]. 计算力学学报, 2005, 22(3): 295—298.
LI Jue, JIN Wu-gen, XUE Xin, et al. Solution of free surface seepage problems by Trefftz indirect method[J]. **Chinese Journal of Computational Mechanics**, 2005, 22(3): 295—298.
- [14] LEONTIEV A, HUACASI W. Mathematical programming approach for unconfined seepage flow problem[J]. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 2001, 25(1): 49—56.
- [15] FILHO O P, LEONTIEV A. An optimization approach for unconfined seepage problem with semipermeable conditions[J]. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, 2009, 39(6): 581—588.
- [16] BERRUT J P, TREFETHEN L N. Barycentric Lagrange interpolation[J]. **SIAM Review**, 2004, 46(3): 501—517.
- [17] NICHOLAS J H. The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation[J]. **IMA Journal of Numerical Analysis**, 2004, 24(4): 547—556.
- [18] 王兆清, 李淑萍, 唐炳涛. 一维重心型插值: 公式、算法和应用[J]. 山东建筑大学学报, 2007, 22(5): 448—453.
WANG Zhao-qing, LI Shu-ping, TANG Bing-tao. Formulations, algorithms and applications on barycentric interpolation in 1D[J]. **Journal of Shandong Jianzhu University**, 2007, 22(5): 448—453.
- [19] 王兆清, 李淑萍, 唐炳涛. 任意连续函数的多项式插值逼近[J]. 山东建筑大学学报, 2007, 22(2): 158—162.
WANG Zhao-qing, LI Shu-ping, TANG Bing-tao. Polynomial interpolation approximations of arbitrary continuous functions[J]. **Journal of Shandong Jianzhu University**, 2007, 22(2): 158—162.
- [20] 王兆清, 李淑萍, 唐炳涛. 圆环变形及屈曲的重心插值配点法分析[J]. 机械强度, 2009, 31(2): 245—249.
WANG Zhao-qing, LI Shu-ping, TANG Bing-tao. Deformation and buckling analysis of ring by barycentric interpolation collocation method[J]. **Journal of Mechanical Strength**, 2009, 31(2): 245—249.
- [21] 李淑萍, 王兆清. 非线性振动分析的重心插值配点法[J]. 噪声与振动控制, 2008, 28(4): 49—52.
LI Shu-ping, WANG Zhao-qing. Barycentric Interpolation Collocation Method for Solving Nonlinear Vibration Problems[J]. **Noise and Vibration Control**, 2008, 28(4): 49—52.
- [22] 王兆清, 李淑萍, 唐炳涛, 等. 脉冲激励振动问题的高精度数值分析[J]. 机械工程学报, 2009, 45(1): 288—292.
WANG Zhao-qing, LI Shu-ping, TANG Bing-tao, et al. High precision numerical analysis of vibration problems under pulse excitation[J]. **Chinese Journal of Mechanical Engineering**, 2009, 45(1): 288—292.
- [23] TREFETHEN L N. Spectral methods in Matlab[M]. Philadelphia: SIAM, 2000.

上接第 1866 页

- [14] 陆银龙, 王连国, 杨峰. 软弱岩石峰后应变软化力学特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(3): 640—648.
LU Yin-long, WANG Lian-guo, YANG Feng. Post-peak strain softening mechanical properties of weak rock[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2010, 29(3): 640—648.
- [15] 张黎明, 王在泉. 粉砂岩峰后破坏区应力脆性跌落的试验和本构方程研究[J]. 实验力学, 2008, 23(3): 234—240.
ZHANG Li-ming, WANG Zai-quan. Theoretical and experimental study of siltstone brittle stress drop in post-failure region[J]. **Journal of Experimental Mechanics**, 2008, 23(3): 234—240.
- [16] LEE Y K, S. PIETRUSZCZAK. A new numerical procedure for elasto-plastic analysis of a circular opening excavated in a strain-softening rock mass[J]. **Tunnelling and Underground Space Technology**, 2008, 23(5): 588—599.
- [17] ALONSO E, ALEJANO LR, VARAS F, et al. Ground response curves for rock masses exhibiting strain-softening behaviour[J]. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, 2003, 27(13): 1153—1185.
- [18] 韩建新, 李术才, 李树忱, 等. 多组贯穿裂隙岩体变形特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2011, 30(增刊 1): 3319—3325.
HAN Jian-xin, LI Shu-cai, LI Shu-chen, et al. Study of deformation characteristic of rock mass with multiple persistent crack sets[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2011, 30(Supp.1): 3319—3325.
- [19] 韩建新, 李术才, 李树忱, 等. 贯穿裂隙岩体强度和破坏方式的模型研[J]. 岩土力学, 2011, 32(增刊 2): 178—184.
HAN Jian-xin, LI Shu-cai, LI Shu-chen, et al. Study of the strength and failure mode of the rock mass with persistent cracks[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2011, 32(Supp.2): 178—184.